

Лекція

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Рівняння з відокремлюваними змінними. Загальний і частинний розв’язки диференціального рівняння.

Мета заняття сформувати у студентів уявлення про диференціальне рівняння; формувати вміння визначати вид диференціального рівняння і знаходити загальний та частинний розв’язки диференціального рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	15 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	50 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 436...441 [4], с. 421...430 [5], с. 269	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

- Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
- Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
- Дубовик, В.П. Вища математика:Збірник задач: навч. посіб. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

Навчальні матеріали лекції

Диференціальні рівняння 1-го порядку. Загальні поняття.

Рівняння, яке зв'язує між собою незалежну змінну, шукану функцію та її похідні або диференціали різних порядків, називається диференціальним рівнянням.

Якщо шукана функція є функцією лише однієї змінної, то диференціальне рівняння називають звичайним; якщо ж незалежних змінних дві або більше, то – рівнянням з частинними похідними.

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, яка входить в це рівняння. Наприклад, рівняння $y' \sin x + y \tan x = 1$ - рівняння першого порядку; $y'' = x^3$ - рівняння другого порядку і т.д.

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

яке зв'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y' . Рівняння (1) не розв'язане відносно похідної.

Рівняння вигляду
$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

називають диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням у нормальній формі.

Функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє диференціальному рівнянню, називається розв'язком цього рівняння. Графік розв'язку називається інтегральною кривою рівняння.

Теорема (про існування і єдиність розв'язку) Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0, y_0) \in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє умову $\varphi_0(x) = y_0$.

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0, y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива.

Задачу відшукування розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (2), який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, називають задачею Коші. З погляду геометрії розв'язати задачу

Коші – означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку (x_0, y_0) .

Розв’язок диференціального рівняння, яке містить стільки незалежних змінних, який порядок рівняння, називається загальним розв’язком цього рівняння.

Функції, які отримують із загального розв’язку при різних значеннях довільних сталих, називають частинними розв’язками цього рівняння. Для знаходження частинного розв’язку диференціального рівняння задають початкові умови.

Розв’язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають особливим розв’язком. Особливий розв’язок неможливо визначити із загального при жодному значенні сталої С.

Рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Для його розв’язання розділяємо змінні:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

Загальний інтеграл рівняння знаходиться інтегруванням:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними записують ще у вигляді:

$$y' = f(x)q(y)$$

Наприклад. 1) Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y \cos y dy = -2x dx$$

$$\int y \cos y dy = -2 \int x dx$$

Інтеграл, який стоїть в лівій частині, береться частинами:

$$\int y \cos y dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y; \quad dv = \cos y dy; \\ du = dy; \quad v = \sin y \end{array} \right\} = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y$$

$$y \sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y \sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- Це і є загальний інтеграл початкового диференціального рівняння.

Щоб перевірити вірність отриманої відповіді продиференціюємо за змінною x .

$$y' \sin y + y y' \cos y - y' \sin y + 2x = 0$$

$$y y' = -\frac{2x}{\cos y} \text{ - вірно}$$

2) Знайти розв'язок диференціального рівняння $\frac{y}{y'} = \ln y$ при умові $y(2) = 1$.

$$\frac{y dx}{dy} = \ln y \quad dx = \frac{\ln y dy}{y} \quad \int dx = \int \frac{\ln y dy}{y}$$

$$x + C = \int \ln y d(\ln y) \quad x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

$$\text{при } y(2) = 1 \text{ отримаємо } 2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \Rightarrow 2 + C = 0; \Rightarrow C = -2;$$

Звідси: $2(x - 2) = \ln^2 y$; або $y = e^{\pm \sqrt{2x-4}}$ - частинний розв'язок;

Перевірка: $y' = e^{\pm \sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, підставимо

$$\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm \sqrt{2x-4}} (\pm \sqrt{2x-4})}{e^{\pm \sqrt{2x-4}}} = \pm \sqrt{2x-4} = \ln y \text{ - вірно.}$$

3) Розв'язати рівняння: $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}} \quad y^{-\frac{2}{3}} dy = dx \quad \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int dx$$

$$3y^{\frac{1}{3}} = x + C \quad 27y = (x + C)^3 \text{ - загальний інтеграл} \quad y = \frac{1}{27} (x + C)^3 \text{ - загальний розв'язок.}$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Яке рівняння називають диференціальним? Наведи приклади.
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Чим відрізняється рівняння першого порядку від рівнянь вищих порядків?
4. Дайте означення розв'язка диференціального рівняння.
5. Чим відрізняється загальний розв'язок диференціального рівняння від частинного розв'язку?
6. Назвіть теорему про існування і єдиність розв'язку.

Домашнє завдання: [1], с. 436...441, [4], с. 421...430, [5], с. 269

Лекція

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Однорідні рівняння першого порядку. Рівняння, які приводяться до однорідних.

Мета заняття сформувати у студентів уявлення про однорідне диференціальне рівняння; формувати вміння визначати вид диференціального рівняння і знаходити загальний та частинний розв'язки однорідного диференціального рівняння.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	20 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	45 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 443, [4], с.430, [5], с.273, [3], с. 204	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

1. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.
4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
5. Дубовик, В.П. Вища математика:Збірник задач: навч. посіб. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

Навчальні матеріали лекції

Однорідні рівняння.

Функцію $f(x, y)$ називають однорідною виміру m , якщо виконується умова

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Наприклад, $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2 - y^2}$ - однорідна функція нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{t^2 x^2 + t^2 y^2}{2t^2 x^2 - t^2 y^2} = \frac{t^2 (x^2 + y^2)}{t^2 (2x^2 - y^2)} = t^0 f(x, y).$$

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Є однорідним, якщо $M(x, y)$ і $N(x, y)$ - однорідні функції одного й того ж виміру.

Однорідне рівняння завжди можна подати у вигляді $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з розділяючимися змінними підстановкою $y = tx$, де t - нова шукана функція. Диференціюючи рівність $y = tx$, отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dt}{dx} + t. \quad (2)$$

Підставивши вирази y і $\frac{dy}{dx}$ в рівняння (1), маємо

$$x \frac{dt}{dx} + t = f(t),$$

звідки

$$\frac{dt}{f(t) - t} - \frac{dx}{x} = 0. \quad (3)$$

Це рівняння з відокремлювальними змінними. Обчислюючи загальний розв'язок рівняння (3), отримаємо загальний розв'язок даного рівняння (1), замінивши t на $\frac{y}{x}$.

Рівняння вигляду $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$ зводиться до однорідного за допомогою підстановки $x = t + \alpha$, $y = v + \beta$, де t і v - нові змінні, α і β - розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0 \\ a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

за умови, що визначник $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Якщо ж $\Delta = 0$, то підстановкою $z = a_1 x + b_1 y + c_1$ рівняння (4) зводиться до рівняння з відокремлювальними змінними.

Приклад. 1) Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

Розв'язання.

Розв'яжемо рівняння відносно похідної $\frac{dy}{dx}$:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Ділимо чисельник і знаменник правої частини рівняння на x^2 , отримаємо:

$$y' = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}} \quad (*)$$

тобто y' є функція відношення $\frac{y}{x}$. Це означає, що дане рівняння - однорідне.

Для розв'язання цього рівняння введемо нову функцію $t = \frac{y}{x}$. Тоді $y = tx$ і $y' = x \frac{dt}{dx} + t$. Рівняння (*) перетворюється у рівняння з відокремлювальними змінними:

$$x \frac{dt}{dx} + t = \frac{1+t^2}{t}, \text{ або } x \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \quad \text{звідки} \quad \frac{dx}{x} = t dt.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + \ln C,$$

звідки $\ln \frac{x}{C} = \frac{t^2}{2}$, тобто $x = C e^{\frac{t^2}{2}}$. Змінюючи в останній рівності t відношенням $\frac{y}{x}$,

остаточно отримаємо $x = C e^{\frac{y^2}{2x^2}}$.

2) Розв'язати рівняння: $y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$.

Введемо допоміжну функцію u .

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Відмітимо, що введена нами функція u завжди додатна, так як в протилежному випадку втрачає зміст початкове диференціальне рівняння, яке містить $\ln u = \ln \frac{y}{x}$.

Підставляємо в початкове рівняння:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u \ln u + u; \quad u'x = u \ln u;$$

Відокремлюємо змінні: $\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x};$

Інтегруючи, отримаємо: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходячи від допоміжної функції до початкової, отримаємо загальний розв'язок.

$$y = x e^{Cx}.$$

Домашнє завдання: [1], с. 443, [4], с.430, [5], с.273, [3], с. 204

Лекція

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Лінійні диференціальні рівняння. Метод варіації довільної сталої. Метод Бернуллі.

Мета заняття сформувати у студентів уявлення про лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку; формувати вміння розв'язувати лінійні рівняння методом варіації довільної сталої та методом Бернуллі.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 4 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	20 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	45 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 449, [4], с.430, [5], с.275 [3], с. 205	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

1. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.
4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
5. Дубовик, В.П. Вища математика:Збірник задач: навч. посіб. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

Навчальні матеріали лекції

Рівняння вигляду: $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$ (1)

називається лінійним рівнянням першого порядку.

Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння називають лінійним неоднорідним; якщо $Q(x) = 0$, то рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0 \quad (2)$$

і називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку.

Термін «лінійне рівняння» пояснюється тим, що невідома функція $y(x)$ і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, тобто лінійно.

Рівняння (2) одночасно є рівнянням з відокремлювальними змінними. Знайдемо його розв'язок :

$$\frac{dy}{dx} = -P(x) \cdot y; \quad \frac{dy}{y} = -P(x) \cdot dx; \quad \int \frac{dy}{y} = - \int P(x) \cdot dx;$$
$$\ln|y| = - \int P(x) \cdot dx + \ln C,$$

звідси

$$y = Ce^{-\int P(x) \cdot dx}.$$

Для розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь застосовують метод Бернуллі або метод варіації довільної сталої.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Розв'язок рівняння (1) шукають у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int P(x) \cdot dx}. \quad (4)$$

При фіксованому значенні C цією формулою задається розв'язок лінійного однорідного рівняння (2). Підставивши (4) у (1), дістанемо рівняння

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x) \cdot dx}. \quad \text{Звідси}$$

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x) \cdot dx} dx + C_1,$$

де C_1 - довільна стала. Тоді загальний розв'язок рівняння (1) задається формулою

$$y = e^{-\int P(x) \cdot dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x) \cdot dx} dx + C_1 \right]$$

Зауваження.

Деякі рівняння будуть лінійними, якщо за невідому функцію розглянути змінну x , а за незалежну – змінну y , тобто рівняння вигляду $x' + P(y) \cdot x = Q(y)$

Наприклад.

1) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \quad (1)$$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом варіації.

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \quad y' = \frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\ln y = \ln x + \ln C \quad y = Cx$$
$$y = C(x)x$$
$$y' = C'(x)x + C(x)$$

Підставимо у рівняння (1)

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2$$

$$C'(x)x = x^2$$

$$C'(x) = x$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)x$$

2) Розв'язати рівняння:

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом варіації.

$$y' - \frac{2y}{x+1} = 0$$

$$y' = \frac{2y}{x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+1}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x+1}$$

$$\ln y = 2 \ln(x+1) + \ln C$$

$$\ln y = \ln(x+1)^2 + \ln C$$

$$y = C(x+1)^2$$

$$y = C(x)(x+1)^2$$

$$y' = C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1)$$

Підставимо у рівняння

$$C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) - \frac{2C(x)(x+1)^2}{x+1} = (x+1)^3$$

$$C'(x)(x+1)^2 = (x+1)^3$$

$$C'(x) = (x+1)$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)(x+1)^2$$

Метод Бернуллі.

Розв'язок нелінійного рівняння (1) шукають у вигляді добутку двох невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$, тобто $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Після цього рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x),$$

або

$$v \frac{du}{dx} + u \left[\frac{dv}{dx} + P(x)v \right] = Q(x) \quad (3)$$

Користуючись тим, що одна із допоміжних змінних, наприклад v , обрана довільно, підберемо її так, щоб вираз у квадратних дужках обертався в нуль, тобто в якості v візьмемо один із частинних розв'язків $v = v(x)$ рівняння з розділюючимися змінними

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

Підставивши вираз $v = v(x)$ у рівняння (3), отримаємо рівняння відносно функції u :

$$v \frac{du}{dx} = Q(x).$$

Це також рівняння з розділюючимися змінними. Відшукав загальний розв'язок цього рівняння $u = u(x, C)$, отримаємо загальний розв'язок рівняння (1):

$$y = u(x, C)v(x).$$

Наприклад.

1). Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

Розв'язання: Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку. Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі: $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}, \quad v' + \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x| + \ln|C|, \quad v = \frac{C}{x}, \quad C = 1, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Повертаємось до рівняння з дужками (вираз в дужках дорівнює нулю):

$$u'v = \frac{\sin x}{x}, \quad u' \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad u' = \sin x, \quad u = -\cos x + C_1.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий: $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C_1)$.

2). Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = 1$$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом Бернуллі.

$$y = uv \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = 1$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = 1$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln v = \ln C - \ln x$$

$$v = \frac{C}{x}$$

$$v = \frac{1}{x}$$

$$u'v = 1$$

Підставимо v

$$u' \frac{1}{x} = 1$$

$$u' = x$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = \frac{\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)}{x}$$

3) Розв'язати рівняння:

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3$$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом Бернуллі.

$$y = uv \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{3uv}{x} = x^3$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{3v}{x}\right) = x^3$$

$$v' - \frac{3v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3dx}{x}$$

$$\ln v = 3 \ln x + \ln C$$

$$\ln v = \ln x^3 + \ln C$$

$$v = Cx^3$$

$$v = x^3$$

Підставимо v

$$u'v = x^3$$

$$u'x^3 = x^3$$

$$u' = 1$$

$$u = x + C_1$$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = (x + C_1)x^3$$

Домашнє завдання: [1], с. 449, [4], с.430, [5], с.275, [3], с. 205

Лекція

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Рівняння, які зводяться до лінійних. Рівняння Бернуллі та Ріккати.

Мета сформувати у студентів уявлення про диференціальні рівняння

заняття Дарбу, удосконалити практичні навички при розв'язуванні рівнянь.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорний конспект

Час – 80 хвилин

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	12 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	53 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с.435	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

6. Дубовик, В.П. Вища математика [Текст] / В.П.Дубовик, І.І.Юрик. – К.:Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали лекції

Розглянемо класи рівнянь, які за допомогою певних перетворень можна звести до лінійних.

1. Рівняння виду
$$y' = \frac{R(y)}{P(y)x + Q(y)} \quad (1)$$

де $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ - задані функції, $R(y) \neq 0$, можна звести до лінійних, якщо x вважати функцією, а y - аргументом: $x = x(y)$; тоді з рівностей (1) і $y'_x x'_y = 1$ дістанемо лінійне рівняння відносно x :

$$\frac{dx}{dy} + \varphi(y)x = f(y), \text{ де } \varphi(y) = -\frac{P(y)}{R(y)}, f(y) = \frac{Q(y)}{R(y)}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $x = u(y)v(y)$.

Приклад

Розв'язати рівняння $(2xy + y^3)dy - dx = 0$.

Оскільки

$$y' = \frac{1}{2xy + y^3}$$

то маємо рівняння виду (1). Якщо вважати x функцією y , то відносно x це рівняння стає лінійним:

$$x' - 2yx = y^3$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$x = uv, \quad u'v + uv' - 2uvy = y^3$$

$$u'v + u(v' - 2vy) = y^3, \quad v' - 2vy = 0, \quad \frac{dv}{v} = 2ydy,$$

$$\ln|v| = y^2 + \ln|C|, \quad v = e^{y^2}, \quad \frac{du}{dy} e^{y^2} = y^3, \quad du = y^3 e^{-y^2} dy,$$

$$u = \int y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int y^3 e^{-y^2} dy^2 = -\frac{1}{2} e^{-y^2} (1 + y^2) + C$$

$$x = uv = C e^{y^2} - \frac{1}{2} (1 + y^2).$$

$$2. \text{ Рівняння виду } f'_y(y)y' + p(x)f(y) = q(x) \quad (2)$$

де f , p , q - задані функції, заміною $z = f(y)$ зводиться до лінійного відносно змінної z :

$$z' + p(x)z = q(x) \quad (3)$$

Справді, якщо $z = f(y)$, де $y = y(x)$ - невідома функція, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = f'_y(y)y'$$

Тому рівняння (2) набирає вигляду (3).

3. Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0; 1 \quad (4)$$

(Рівняння (4) запропонував у 1695 р. Якоб Бернуллі, а в 1697 р. його брат Йоганн Бернуллі це рівняння розв'язав.)

Очевидно, при $\alpha = 0$ це рівняння - лінійне, а при $\alpha = 1$ - з відокремлюваними змінними. Припускаючи $y \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, поділимо рівняння (4) на y^α , тоді матимемо рівняння виду (2):

$$y^{-\alpha} y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

Таким чином, заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Проте на практиці розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його до лінійного рівняння. Слід зазначити, що при $\alpha > 0$, крім розв'язку $y = uv \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y \equiv 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $(x^2 \ln y - x)y' - y = 0$.

Перетворимо рівняння:

$$y' = \frac{y}{x^2 \ln y - x}$$

звідки $xy' + x = x^2 \ln y$, або $x' + \frac{x}{y} = \frac{x^2}{y} \ln y$.

Маємо рівняння Бернуллі відносно змінної $x = x(y)$. Знайдемо його розв'язки:

$$x = uv, u'v + uv' - \frac{uv}{y} = u^2 v^2 \frac{\ln y}{y};$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = u^2 v^2 \frac{\ln y}{y}; \frac{dv}{dy} + \frac{v}{y} = 0, \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}; v = \frac{1}{y};$$

$$\frac{du}{dy} \frac{1}{y} = u^2 \frac{1}{y^2} \frac{\ln y}{y}; \frac{du}{u^2} = \frac{\ln y}{y^2} dy; u = \frac{y}{1 + \ln y - Cy}; x = uv = \frac{1}{1 + \ln y - Cy}$$

4. Рівняння виду

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x) \quad (5)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ - задані функції, називається рівнянням Ріккаті. Якщо p , q , r - сталі числа, то це рівняння інтегрується відокремленням змінних:

$$\int \frac{dy}{r - py - qy^2} = x + C$$

Коли $q(x) \equiv 0$, рівняння (5) стає лінійним, а у випадку $r(x) \equiv 0$ - рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння (5) не інтегрується у квадратурах. Проте якщо відомий його один частинний розв'язок $y_1 = y_1(x)$, то заміною $y = y_1 + z$ рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

Приклад

$$\text{Розв'язати у квадратурах рівняння } y' + 2y(y - x) = 1$$

Задане рівняння є рівнянням Ріккаті. Неважко пересвідчитись, що функція $y = x$ - розв'язок цього рівняння, тому заміна $y = x + z$ зводить його до рівняння Бернуллі:

$$1 + z' + 2(x + z)(x + z - x) = 1$$

або

$$z' + 2zx = -2z^2$$

Далі маємо

$$z = uv; u'v + uv' - 2uvx = -2u^2v^2;$$

$$u'v + u(v' + 2vx) = -2u^2v^2;$$

$$\frac{dv}{dx} = -2vx; \frac{dv}{v} = -2xdx; v = e^{-x^2};$$

$$\frac{du}{dx} e^{-x^2} = -2u^2 e^{-2x^2}; -\frac{du}{u^2} = 2e^{-x^2} dx;$$

$$u = \left(2 \int e^{-x^2} dx + C\right)^{-1}; z = uv = e^{-x^2} \left(2 \int e^{-x^2} dx + C\right)^{-1};$$

отже, розв'язком даного рівняння є:

$$y = x; y = x + z = x + e^{-x^2} \left(2 \int e^{-x^2} dx + C\right)^{-1}.$$

Домашнє завдання: [4], с.435

Лекція

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Рівняння в повних диференціалах. Інтегрування рівнянь в повних диференціалах.

Мета сформувати у студентів уявлення про диференціальні рівняння в
заняття повних диференціалах; формувати вміння розв'язувати рівняння в повних диференціалах.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 4 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	15 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	50 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с. 89, [4], с. 438 [3], с. 207	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

2. Самойленко, А.М. Диференціальні рівняння [Текст]: підручник/ А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – К.: Лебідь, 2003 – 600 с.
3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.
4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали лекції

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

називається **рівнянням в повних диференціалах**, якщо ліва частина цього рівняння представляє собою повний диференціал деякої функції $u = F(x, y)$.

Інтегрування такого рівняння зводиться до відшукування функції u , після чого розв'язок легко знаходиться за формулою : $du = 0$; $u = C$.

Якщо диференціальна форма $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції u , тоді можна записати:

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Тобто
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}.$$

Необхідна і достатня умова того, що ліва частина диференціального рівняння є повним диференціалом:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (2)$$

Тепер розглянемо питання про знаходження функції u .

Проінтегруємо рівність $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$u = \int M(x, y)dx + C(y).$$

Після інтегрування отримаємо не сталу величину C , а деяку функцію $C(y)$, так як при інтегруванні змінна y вважається сталим параметром.

Визначимо функцію $C(y)$.

Продиференціюємо отриману рівність по y .

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + C'(y).$$

Звідси отримаємо: $C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx$.

Для знаходження функції $C(y)$ необхідно проінтегрувати зведену вище рівність. Але перед інтегруванням треба довести, що функція $C(y)$ не залежить від x . Ця умова буде виконана, якщо похідна цієї функції по x дорівнює нулю.

$$\begin{aligned} [C'(y)]'_x &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Тепер визначаємо функцію $C(y)$:

$$C(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C$$

Підставивши цей результат у вираз для функції u , отримаємо:

$$u = \int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy + C.$$

Тоді загальний інтеграл початкового диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$\int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy = C.$$

Треба відмітити, що при розв'язуванні рівнянь в повних диференціалах не обов'язково користуватися отриманою формулою. Розв'язок можна отримати більш компактним, якщо просто використовувати цей метод послідовно.

Наприклад.

Розв'язати рівняння $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$

Перевіримо умову тотальності: $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x$;

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Умова тотальності виконується, отже, початкове диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах.

Визначимо функцію u .

$$u = \int M(x, y) dx + C(y) = \int (3x^2 + 10xy) dx + C(y) = x^3 + 5x^2 y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x, y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int (-1) dy = -y + C_1;$$

Отже, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1$.

Знаходимо загальний інтеграл початкового диференціального рівняння:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;$$

$$x^3 + 5x^2y - y = C.$$

Таким чином, рівняння в повних диференціалах інтегрується досить просто. У зв'язку з цим виникає питання, а чи не можна множенням на певний множник $\mu(x, y)$ довільне рівняння у диференціальній формі звести до рівняння в повних диференціалах? Виявляється, що за певних умов це цілком можливо.

Функція $\mu(x, y)$ називається інтегрувальним множником рівняння (1), якщо після множення на неї цього рівняння воно стає рівнянням у повних диференціалах. Можна довести, що всяке диференціальне рівняння першого порядку, яке задовольняє умовам теореми Коші, має безліч інтегруючих множників.

Розглянемо методи знаходження інтегруючих множників $\mu(x, y)$. Загального методу знаходження функції $\mu(x, y)$ немає. Їх можна знайти лише в деяких окремих випадках. Складемо рівняння для інтегрувальних множників. Якщо $\mu = \mu(x, y)$ - інтегрувальний множник рівняння (1), то рівняння

$$P\mu dx + Q\mu dy = 0$$

є рівнянням у повних диференціалах. Тому, згідно з умовою (2), маємо:

$$\frac{\partial(P\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(Q\mu)}{\partial x}$$

тобто

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

звідки

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

або

$$P \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3)$$

Отже, щоб дістати інтегрувальний множник, треба знайти який-небудь частинний розв'язок рівняння (3). Це рівняння є диференціальним рівнянням з частинними

похідними відносно невідомої функції $\mu(x, y)$. У загальному випадку задача знаходження $\mu(x, y)$ з рівняння (3) значно складніша, ніж розв'язування самого рівняння (1).

Розглянемо два випадки, коли рівняння (3) спрощується і інтегрувальний множник рівняння (1) можна знайти. Припустимо, що рівняння (1) має інтегрувальний множник, який залежить лише від x , тобто $\mu = \mu(x)$; тоді в рівнянні (3) $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$ і для знаходження μ матимемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (4)$$

з якого однією квадратурою визначається $\ln \mu$, а потім і μ . Зрозуміло, що рівняння (4) має зміст лише в тому випадку, коли вираз $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$ не залежить від y , а залежить від x .

Аналогічно, якщо вираз $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ залежить лише від y і не залежить від x , то інтегрувальний множник є функцією однієї змінної y і його знаходять з рівняння

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Домашнє завдання:

[2], с. 89,

[4], с. 438

[3], с. 207

Лекція

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші. Рівняння, які допускають зниження порядку

Мета сформувати у студентів уявлення про диференціальні рівняння в
заняття вищих порядків; удосконалити практичні навички

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с. 274 [4], с. 451...455	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

2. Самойленко, А.М. Диференціальні рівняння [Текст]: підручник/ А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – К.: Лебідь, 2003 – 600 с.
4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали лекції

Розглянемо диференціальні рівняння, які містять похідні вищих порядків. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком* цього рівняння.

Для диференціальних рівнянь вищих порядків, як і для рівнянь першого порядку, розглядається задача Коші або задача з початковими умовами.

Диференціальним рівнянням n порядку називається рівняння вигляду:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

У деяких випадках це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Рівняння вищих порядків мають нескінчену кількість розв'язків.

Означення. Розв'язок $y = \varphi(x)$ задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, якщо $\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Означення. Знаходження розв'язку рівняння $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, яке задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, називається **розв'язком задачі Коші**.

Теорема Коші. (Теорема про необхідну і достатню умови існування розв'язку задачі Коші).

Рівняння, які допускають зниження порядку.

Зниження порядку диференціального рівняння – основний метод розв'язування рівнянь вищих порядків. Цей метод дає можливість порівняно легко знаходити розв'язок, але його використовують не до всіх рівнянь. Розглянемо випадки, коли можливі зниження порядків.

1. Рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.

Якщо $f(x)$ – неперервна функція на деякому проміжку $a < x < b$, то розв'язок може бути знайдений послідовним інтегруванням.

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int f(x) dx + C_1; \\ y^{(n-2)} &= \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2; \\ y &= \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n; \end{aligned}$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y''' = e^{2x}$ з початковими умовами $x_0 = 0; y_0 = 1; y'_0 = -1; y''_0 = 0$.

$$\begin{aligned} y'' &= \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1; \\ y' &= \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2; \\ y &= \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3; \end{aligned}$$

Підставимо початкові умови:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Отримаємо частинний розв'язок (розв'язок задачі Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

2. Рівняння, які не містять явно шукану функцію та її похідні до порядку $k - 1$ включно.

Це рівняння вигляду: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.

У рівняннях такого типу можливе зниження порядку на k одиниць. Для цього вводять заміну змінної:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad \dots \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тоді отримаємо: $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

Тепер допустимо, що отримане диференціальне рівняння проінтегроване і сукупність його розв'язків можна виразити співвідношенням:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}).$$

Зробивши обернену підстановку, маємо:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

Інтегруючи отримане співвідношення послідовно k раз, отримаємо відповідь:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \frac{y''}{x}$.

Зробимо підстановку $z = y''$; $z' = y'''$;

$$z' = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \quad z = C_1 x;$$

Повертаємося до заміни, отримаємо:

$$y'' = C_1 x; \quad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y = Cx^3 + C_2x + C_3;$$

Відмітимо, що це відношення є розв'язком для всіх значень змінної x крім значення $x = 0$.

3. Рівняння, які не містять явно незалежної змінної.

Це рівняння вигляду $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Порядок цих рівнянь можна знизити заміною $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Підставивши ці значення в початкове диференціальне рівняння, отримаємо:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Якщо це рівняння проінтегрувати, і $\Phi(y, p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$ - сукупність його розв'язків, то для розв'язання даного диференціального рівняння залишається розв'язати рівняння першого порядку:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Заміна змінної: $p = y'$; $y'' = \frac{dp}{dy} p$;

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \quad p \left(y \frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0;$$

$$1) \quad y \frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \quad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$$

Для розв'язку отриманого диференціального рівняння зробимо заміну змінної: $u = \frac{p}{y}$.

$$u + \frac{du}{dy} y = 4 + u; \quad du = 4 \frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4 \int \frac{dy}{y}; \quad u = 4 \ln|y| + 4 \ln C_1; \quad u = 4 \ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y \ln|C_1 y|;$$

Підставивши $p = \frac{dy}{dx}$, отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = 4y \ln|C_1 y|; \quad \int \frac{dy}{4y \ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4} \int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4} \ln|\ln|C_1 y|| + C_2;$$

Загальний інтеграл має вигляд: $\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C$;

$$2) \quad p = 0; \quad y' = 0; \quad y = C;$$

Таким чином, отримали два загальних розв'язка .

Домашнє завдання:

[2], с. 274

[4], с. 451...455

Лекція

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема	Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами
Мета	сформувати у студентів уявлення про лінійне однорідне
заняття	диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами; формувати вміння записувати характеристичне рівняння лінійного однорідного рівняння і знаходити загальний та частинний розв'язки цього рівняння, удосконалити практичні навички.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 451 [4], с. 466	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

1. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали лекції

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0 \quad (1)$$

$$y'' + py' + qy = 0$$

де p і q - сталі величини.

Для відшукування загального розв'язку рівняння (1) складаємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + pk + q = 0$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (1) будується в залежності від коренів k_1 і k_2 характеристичного рівняння.

Можливі 3 випадки:

1) Корені k_1 і k_2 - дійсні та різні. В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2) Корені k_1 і k_2 - дійсні та рівні: $k_1 = k_2 = k$. В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$$

3) Корені k_1 і k_2 - комплексно - спряжені: $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$. В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд:

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Розв'язання: Записуємо характеристичне рівняння :

$$k^2 + k - 6 = 0$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -3 \quad - 1\text{-й випадок}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} \quad - \text{відповідь.}$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} + 15y = 0.$$

$$\text{Розв'язання:} \quad k^2 - 8k + 15 = 0$$

$$k_1 = 5, \quad k_2 = 3 \quad - 1\text{-й випадок}$$

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{3x} \quad - \text{відповідь.}$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9 \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\text{Розв'язання:} \quad k^2 - 9k = 0$$

$$k(k - 9) = 0$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 9 \quad - \text{1-й випадок}$$

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{9x} = C_1 + C_2 e^{9x} \quad - \text{відповідь.}$$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} + 16y = 0.$$

Розв'язання:

$$k^2 - 8k + 16 = 0$$

$$k_1 = k_2 = 4 \quad - \text{2-й випадок}$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{4x} \quad - \text{відповідь.}$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

Розв'язання:

$$k^2 - 6k + 25 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 25 = -64$$

$$k_1 = \frac{6 + \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 + 8i}{2} = 3 + 4i$$

$$k_2 = \frac{6 - \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i \quad - \text{3-й випадок}$$

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) \quad - \text{відповідь.}$$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0 \quad y = 2, \quad y' = 0, \quad x = 0$$

Розв'язання:

$$k^2 - 1 = 0$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 - C_2 \end{cases} \quad C_1 = 1 \quad C_2 = 1$$

$$y = e^x + e^{-x} \quad - \text{відповідь.}$$

Домашнє завдання

[1], с. 451

[4], с. 466

Лекція

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема	Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами
Мета заняття	сформувати у студентів уявлення про лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами; формувати вміння знаходити загальний та частинний розв'язки цього рівняння, удосконалити практичні навички.
Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН опорний конспект	

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 466	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали лекції

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = f(x) \quad (1)$$

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

де p і q - сталі величини.

Воно відрізняється від відповідного лінійного однорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

присутністю в правій частині деякої функції $f(x)$.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (1) спочатку треба знайти загальний розв'язок $\bar{y}$ рівняння (2), а потім знайти деякий частинний розв'язок y^* рівняння (1). Їх сума є загальним розв'язком даного неоднорідного рівняння (1):

$$y = \bar{y} + y^*$$

Правило відшукування частинного розв'язку y^* рівняння (1) в наступних випадках:

Права частина $f(x)$ має вигляд: $f(x) = e^{kx}P_n(x)$, де $P_n(x)$ - поліном степеня n .

Права частина $f(x)$ має вигляд: $f(x) = a \cos ax + b \sin ax$.

Розглянемо кожний випадок окремо.

1) Нехай права частина рівняння (1) має вигляд: $f(x) = e^{kx}P_n(x)$

причому k не є коренем характеристичного рівняння $k^2 + p k + q = 0$, яке є відповідним однорідному рівнянню (2). Тоді частинний розв'язок рівняння (1) слідє шукати у вигляді: $y^* = e^{kx}Q_n(x)$

де $Q_n(x)$ - деякий поліном того ж степеня n з невизначеними коефіцієнтами.

Якщо ж число k є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (1) слідє шукати у вигляді: $y^* = x^m e^{kx} Q_n(x)$, де m - кратність кореня k (тобто $m = 1$, якщо k – однократний корінь і $m = 2$, якщо k – двохкратний корінь).

2) Нехай тепер права частина рівняння (1) має вигляд: $f(x) = a \cos ax + b \sin ax$, причому числа $\pm ai$ не є коренями характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок рівняння (1) слідє шукати у вигляді: $y^* = A \cos ax + B \sin ax$, де A і B - невизначені коефіцієнти.

Якщо ж комплексні числа $\pm ai$ є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (1) слідє шукати у вигляді:

$$y^* = x(A \cos ax + B \sin ax)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ.

1. Розв'яжіть рівняння:

$$y'' + 4y' + 3y = (8x^2 + 84x)e^x \quad (1)$$

Розв'язання: Знаходимо розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Складаємо його характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 + 4k + 3 = 0$$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -3$$

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

$$f(x) = (8x^2 + 84x)e^x, \quad k = 1 \text{ (не є коренем характеристичного рівняння)}$$

$$y^* = e^x(Ax^2 + Bx + C)$$

$$y^{*'} = e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(2Ax + B)$$

$$y^{*''} = e^x(Ax^2 + Bx + C) + 2e^x(2Ax + B) + e^x 2A$$

Після підстановки цих обчислень в рівняння (1) отримаємо: $A = 1, \quad B = 9, \quad C = -7$

$$y^* = e^x(x^2 + 9x - 7)$$

Загальний розв'язок рівняння (1): $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + e^x(x^2 + 9x - 7)$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 14e^{-3x}$$

Розв'язання

Знаходимо розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Складаємо його характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

$$k_1 = k_2 = -3$$

$$\bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$$

$$f(x) = 14e^{-3x}, \quad k = -3 \text{ (двократний корінь характеристичного рівняння)}$$

$$y^* = x^2 A e^{-3x}$$

$$y^{*'} = 2A x e^{-3x} - 3A x^2 e^{-3x}$$

$$y^{*''} = 2Ae^{-3x} - 6Axe^{-3x} - 6Axe^{-3x} + 9Ax^2e^{-3x}$$

$$2Ae^{-3x} - 12Axe^{-3x} + 9Ax^2e^{-3x} + 12Axe^{-3x} - 18Ax^2e^{-3x} + 9Ax^2e^{-3x} = 14e^{-3x}$$

$$2A - 12Ax + 9Ax^2 + 12Ax - 18Ax^2 + 9Ax^2 = 14$$

$$2A = 14$$

$$A = 7$$

$$y^* = 7x^2e^{-3x}$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-3x} + 7x^2e^{-3x}$$

Домашнє завдання: [4], с. 466

Лекція

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема	Розв'язування систем диференціальних рівнянь методом виключення
Мета заняття	сформувані у студентів уявлення про систему диференціальних рівнянь ; формувати вміння розв'язувати систему диференціальних рівнянь методом виключення, удосконалити практичні навички.
Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН	опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 453	10 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

1. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

Навчальні матеріали лекції

У багатьох економічних задачах потрібно знати не одну, а одразу кілька невідомих функцій, пов'язаних між собою кількома диференціальними рівняннями. Сукупність таких рівнянь утворює систему диференціальних рівнянь.

Розглянемо деякі найпростіші системи.

Позначимо незалежну змінну x , залежні змінні y, z .

Нормальні системи рівнянь

Означення. **Нормальною системою диференціальних рівнянь** називають систему вигляду

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x; y; z), \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x; y; z); \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y' = f_1(x; y; z), \\ z' = f_2(x; y; z) \end{cases} \quad (1)$$

Інакше кажучи, систему диференціальних рівнянь називають **нормальною**, якщо в лівій частині рівнянь зовсім не містять похідних.

Означення. **Розв'язком** системи (1) називають сукупність функцій $y=Y_1(x)$ та $z=Y_2(x)$, які задовольняють кожне з рівнянь цієї системи.

До системи нормальних рівнянь зводять системи і рівняння вищих порядків.

Наприклад, система 2-го порядку

$$\begin{cases} x'' = 2x' + y' - x + y, \\ y'' = y' + x \end{cases}$$

введенням нових змінних $x'=u, y'=v, x''=u', y''=v'$ зводиться до нормальної системи

$$\begin{cases} x' = u, \\ y' = v, \\ u' = 2u + v - x + y \\ v' = v + x. \end{cases}$$

Введенням нових змінних всяке диференціальне рівняння n -го порядку, розв'язане відносно вищої похідної, зводиться до еквівалентної нормальної системи n рівнянь 1-го порядку.

Нехай задано рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{(n-1)}).$$

Припустимо: $y=u_1, y'=u_2, \dots, y^{(n-1)}=u_n$. Тоді $y'=u_1' = u_2, y'' = u_2' = u_3, \dots, y^{(n-1)} = u_{n-1}' = u_n, y^{(n)} = u_n'$.

Отримаємо нормальну систему $u_i' = u_{i+1}, i=1, \dots, n-1, u_n' = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n$.

Нормальну систему рівнянь можна замінити одним рівнянням, порядок якого дорівнює числу рівнянь системи.

Нехай задана нормальна система (1). Продиференціюємо за x будь-яке, наприклад перше, рівняння:

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x}.$$

Підставивши в цю рівність значення похідних $u'_1, u'_2, u'_{3,...}, u'_n$, з системи (1), дістанемо $u''_1 = F_2(x, u_1, u_2, u_{3,...}, u_n)$.

Аналогічно знаходимо похідні n -го порядку включно:

$$u_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_n} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x} = F_3(x, u_1, u_2, \dots, u_n),$$

$$u_1^{(n)} = F_n(x, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u_1' = F_2(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ u_1'' = F_2(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ u_1^{(n)} = F_2(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases} \quad (2)$$

Якщо з перших $n-1$ рівнянь системи (2) знайти (якщо це можливо) змінні

$$u_2 = Y_2 \left(x, u_1, u_1', \dots, u_1^{(n-1)} \right),$$

$$u_3 = Y_3 \left(x, u_1, u_1', \dots, u_1^{(n-1)} \right),$$

$$u_n = Y_n(x, u_1, u_1', \dots, u_1^{(n-1)}), \quad (3)$$

і підставити їх значення в останнє рівняння, одержимо рівняння n -го порядку відносно змінної u_1 :

$$u_1^{(n)} = \Phi(x, u_1, u_2, \dots, u_1^{(n-1)}). \quad (4)$$

Нехай $u_{1,\psi_1}(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ – розв’язок рівняння (4), де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі.

Продиференціюємо його $n-1$ раз і, підставивши значення похідних $u'_1, u''_1, \dots, u_1^{(n-1)}$ у рівняння (3), дістанемо

[illegible]

Для нормальної системи (2) справджується теорема Коші про існування і єдність розв'язку.

Теорема Коші

Якщо в деякій області G функції $f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$, $k=1, 2, \dots, n$ системи (2) неперервні разом з усіма своїми похідними $\frac{\partial f_k}{\partial u_i}$, $i, k=1, 2, \dots, n$, то для будь-якої точки

$(x_0, u_{10}, \dots, u_{n0}) \in G$ існує один розв'язок $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, який задовольняє початкові умови:

$$u_1(x_0) = u_{10}; u_2(x_0) = u_{20}; \dots; u_n(x_0) = u_{n0}.$$

Для інтегрування системи (2) можна застосувати метод, за допомогою якого ця система буде зведена до рівняння (4). Цей метод називають методом включення змінної.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Розв'язання.

Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = -7x' + y'.$$

Підставимо в це рівняння значення похідної y' із другого рівняння системи: $x'' = -7x' + (-2x - 5y)$.

З першого рівняння підставимо $x'' = x' + 7x$ в отримане рівняння:

$$x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Маємо лінійне однорідне рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.

Інтегруючи його, одержуємо $x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$.

Оскільки $y = x' + 7x$, то

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}((C_1 \cos t + C_2 \sin t)) = e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t).$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд: $x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$,

$$y = e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t)$$

Домашнє завдання: [1], с. 453